INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. a) Demonstrați că: $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x], \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Rezolvați ecuația: $\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{4x+1}{6}\right]=5x-4$.

c) Dacă n şi k sunt numere naturale astfel încât $2^k \le n < 2^{k+1}$ demonstrați că:

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{2^2}\right]+\left[\frac{n+2^2}{2^3}\right]+\ldots+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=n\ .$$

Soluție.

a) Dacă $n\in\mathbb{Z}, n\le x<n+\frac{1}{2}\Rightarrow[x]=\left[x+\frac{1}{2}\right]=n$ şi $[2x]=2n$ 1p

Dacă $n+\frac{1}{2}\le x<n+1\Rightarrow[x]=n,\left[x+\frac{1}{2}\right]=n+1$ şi $[2x]=2n+1$ 1p

b) Notăm $\frac{2x-1}{3}=y\Rightarrow x=\frac{3y+1}{2}$ 1p

Ecuația devine $[y]+\left[y+\frac{1}{2}\right]=\frac{15y-3}{2}\Rightarrow[2y]=\frac{15y-3}{2}=m\in\mathbb{Z}$ 1p

$y=\frac{2m+3}{15};-\frac{9}{11}<m\le\frac{6}{11}\Rightarrow m=0\Rightarrow y=\frac{1}{5}$ şi $x=\frac{4}{5}$ 1p

c) $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x]$ 1p

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]=\left[\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right]=[n]-\left[\frac{n}{2}\right]$$

$$\left[\frac{n+2}{2^2}\right]=\left[\frac{n}{2^2}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{2^2}\right]$$

...

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=\left[\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{n}{2^k}\right]-\left[\frac{n}{2^{2k+1}}\right]$$

$S=[n]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]=n$ 1p

2. Fie ΔABC şi $A' \in (BC)$. Dreapta AA' intersectează a doua oară cercul circumscris ΔABC în D.

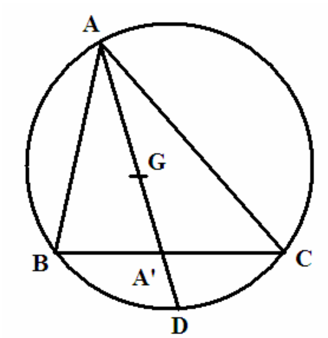
a) Demonstraţi că $AA' \cdot A'D = A'B \cdot A'C$;

b) Dacă centrul de greutate $G \in AA'$ demonstraţi că: $9AG \cdot GD = AB^2 + BC^2 + CA^2$;

<u>Soluţie.</u>

a) $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ADC$ şi $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle BCD \Rightarrow \Delta ABA' \sim \Delta CDA' \Rightarrow AA' \cdot A'D = A'B \cdot A'C$ 2p

b)



$G \in AA' \Rightarrow BA' = A'C = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow A'D = \dfrac{BC^2}{4 \cdot AA'}$ 1p

$GD = GA' + A'D = \dfrac{AA'}{3} + \dfrac{BC^2}{4 \cdot AA'} = \dfrac{4A'A^2 + 3BC^2}{12 \cdot AA'}$ 2p

$9AG \cdot GD = 9 \cdot \dfrac{2}{3} AA' \cdot \dfrac{4 \cdot A'A^2 + 3BC^2}{12 \cdot AA'} = \dfrac{2\left(AB^2 + AC^2\right) - BC^2 + 3BC^2}{2} = AB^2 + AC^2 + BC^2$ 2p

3. La finala concursului de matematică aplicată "Adolf Haimovici", profilul ştiinţe s-au calificat 50 elevi din clasa ^{a} IX ^{a}. După corectarea lucrărilor, 19 dintre ei au obţinut punctajul maxim. S-au procedat, obişnuit la o probă de baraj pentru a desemna câştigătorul. Dar, şi la această probă toţi cei 19 elevi au obţinut punctajul maxim. Împreună cu ei am convenit următoarea regulă pentru desemnarea câştigătorului:

Elevii se aşează în cerc şi sunt numerotaţi cu 1, 2, 3, ..., 19.

Apoi, începând cu cel de pe poziţia 2, fiecare al doilea concurent este eliminat, până când rămâne câştigătorul.

a) Pe ce poziţie se află câştigătorul ?

b) Dar dacă ar fi rămas doar 16 elevi care ar fi participat la desemnarea câştigătorului, care ar fi fost poziţia acestuia ?

<u>Soluţie.</u>

a) Fie $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9, E_{10}, E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{14}, E_{15}, E_{16}, E_{17}, E_{18}, E_{19}$ cei 19 elevi.

În prima etapă sunt eliminaţi: $E_2, E_4, E_6, E_8, E_{10}, E_{12}, E_{14}, E_{16}$ şi E_{18} 1p

Urmează: $E_1, E_5, E_9, E_{13}, E_{17}$ 1p

Apoi: E_3, E_{11}, E_{19} 1p

În ultima etapă este eliminat E_{15} şi câştigătorul este E_7 .... 1p

b) Fie $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9, E_{10}, E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{14}, E_{15}, E_{16}$ cei 16 elevi.

În prima etapă sunt eliminaţi: $E_2, E_4, E_6, E_8, E_{10}, E_{12}, E_{14}, E_{16}$.

Apoi: E_3, E_7, E_{11}, E_{15} 1p

Urmează: E_5, E_{13} 1p

În ultima etapă este eliminat E_9 şi câştigătorul este E_1 .... 1p

4. Se consideră funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ astfel încât

$f(n+1) = f(n) + \dfrac{1}{n^2 + 3n + 2}, (\forall) n \in \mathbb{N}$ şi $f(2014) = \dfrac{2014}{2015}$.

a) Să se demonstreze că $f(n+1)=f(n)+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$.

b) Determinați funcția *f*.

Soluție.

a) $\frac{1}{n^2+3n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$, de unde rezultă cerința 2p

b) $f(n+1)=f(n)+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$

Dăm lui n valorile: 0, 1 , 2, ..., n – 1 şi obținem:

$$\begin{cases} f(1)=f(0)+1-\frac{1}{2} \\ f(2)=f(1)+\frac{1}{2}-\frac{1}{3} \\ f(3)=f(2)+\frac{1}{3}-\frac{1}{4} \\ \text{................................} \\ f(n)=f(n-1)+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \end{cases}$$ 2p

Adunând aceste egalități, membru cu membru, obținem:

$f(n)=f(0)+\frac{n}{n+1},\quad (\forall)n\in\mathbb{N}$ 1p

$n=2014\Rightarrow f(2014)=f(0)+\frac{2014}{2015}\Rightarrow f(0)=0$ 1p

Aşadar $f(n)=\frac{n}{n+1},\quad (\forall)n\in\mathbb{N}$ 1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAŢIONALĂ
13 aprilie 2014

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Se consideră numărul real $x=\sqrt[5]{100}$.

a) Determinaţi partea întreagă a numărului x.

b) Stabiliţi care este numărul întreg cel mai apropiat de x.

c) Demonstraţi că există o infinitate de numere reale pozitive $a, a\neq 1$ pentru care $\log_a x$ este număr raţional.

Soluţie.

a) Cum $2^5=32<100<243=3^5$, rezultă că $2<x<3$, aşadar $[x]=2$ 2p

b) Trebuie comparate numerele x şi $\frac{5}{2}$, adică 100 şi $\left(\frac{5}{2}\right)^5$, sau $100\cdot 2^5$ şi 5^5 . Cum $100\cdot 2^5=3200$ şi $5^5=3125$, deducem că $x>\frac{5}{2}$, prin urmare întregul cel mai apropiat de x este 3 .... 3p

c) Considerând $a=10^r$, cu $r\in\mathbb{Q}^*$, obţinem că $\log_a x=\log_{10^r} 10^{\frac{2}{5}}=\frac{1}{r}\cdot\frac{2}{5}\cdot\lg 10=\frac{2}{5r}\in\mathbb{Q}$ 2p

2. Spunem că un număr complex z este <u>de tip I</u> dacă $\left|z^2+1\right|\leq 1$ şi este <u>de tip II</u> dacă $\left|z+1\right|\leq 1$.

a) Daţi un exemplu de număr complex de tip I care are modulul mai mare decât 1.

b) Demonstraţi că o infinitate de numere complexe de tip II au modulul mai mare decât 1.

c) Demonstraţi că, dacă un număr complex este atât de tip I cât şi de tip II, atunci modulul său este cel mult egal cu 1.

Soluţie.

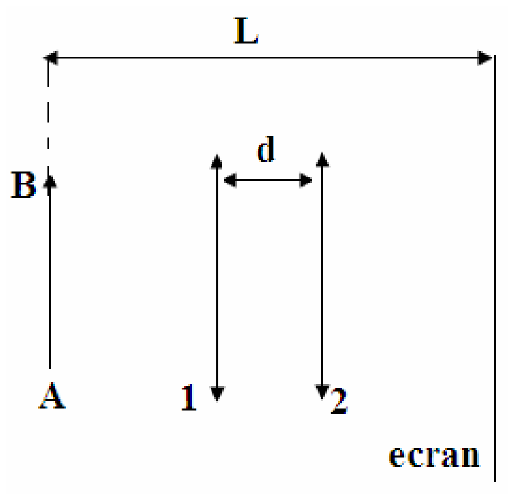
a) De exemplu, numărul $z=\frac{5}{4}i$ are modulul $|z|=\frac{5}{4}>1$ şi este de tip I: $\left|z^2+1\right|=\left|-\frac{25}{16}+1\right|=\frac{9}{16}<1$
.... 2p

b) Numerele complexe de tip II sunt cele ale căror imagini în planul complex aparţin discului $\mathcal{D}(A,1)$, unde $z_A=-1$. Numerele complexe de modul 1 sunt cele ale căror imagini în planul complex aparţin cercului unitate $\mathcal{C}(0,1)$. Evident, există o infinitate de puncte ale discului $\mathcal{D}(A,1)$ situate în exteriorul cercului $\mathcal{C}(0,1)$ 2p

c) Avem: $2|z|=|2z|=\left|(z+1)^2-(z^2+1)\right|\leq|z+1|^2+\left|z^2+1\right|\leq 1+1=2$, prin urmare $|z|\leq 1$ 3p

3. Măsurarea distanţei focale a unei lentile convergente se poate face prin metoda Bessel, care presupune aşezarea lentilei între un obiect luminos AB şi un ecran, considerate fixe, aflate la distanţa L unul faţă de celălalt. Se constată că există două poziţii ale lentilei (1 şi 2) pentru care se obţin imagini clare ale obiectului luminos pe ecran, iar cele două poziţii sunt situate la distanţa d una faţă de cealaltă.

Aflaţi distanţa focală f a lentilei, funcţie de L şi d. Se consideră cunoscută formula lentilelor $\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}$, unde p este distanţa de la obiect la lentilă, iar p' este distanţa de la lentilă la imaginea obiectului (pe ecran).



Soluţie.

Scriem formula lentilelor pentru poziţiile 1 şi 2 ale lentilei:

$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}$, respectiv $\frac{1}{p+d}+\frac{1}{p'-d}=\frac{1}{f}$, $p+p'=L$ 2p

Prima relaţie conduce la $Lf=pp'$, iar cea de a doua la $Lf=(p+d)(p'-d)$ 1p

Deducem $pp'=pp'+dp'-dp-d^2$, de unde $p'-p=d$.

Însă $p+p'=L$ şi, de aici, $p=\frac{L-d}{2}$, iar $p'=\frac{L+d}{2}$ 2p

Astfel, $f=\frac{pp'}{L}=\frac{L^2-d^2}{4L}$ 2p

4. Comisia centrală a concursului naţional de matematică "Adolf Haimovici" este formată din cinci membri. Documentele la care lucrează comisia sunt păstrate într-un seif metalic, încuiat cu lacăte diferite. Fiecare dintre membrii comisiei are cheile unor dintre lacăte, astfel încât seiful să poată fi deschis atunci când se întâlnesc cel puţin trei membri ai comisiei şi să nu poată fi deschis de doi sau mai puţini membri.

a) Care este numărul minim de lacăte ale seifului ?

b) Câte chei trebuie să aibă fiecare membru al comisiei ?

c) Care este modul de împărţire a cheilor către membrii comisiei ?

Soluţie.

a) Conform enunţului, pentru orice grup de 2 membri trebuie să existe un lacăt a cărui cheie să nu se afle la nici unul dintre ei, dar aceasta să se afle la fiecare dintre cei trei membri absenţi, pentru ca prezenţa oricăruia dintre ei să facă posibilă deschiderea seifului 1p

Aşadar, numărul minim de lacăte este egal cu numărul modurilor în care pot fi formate grupe de câte 2 membri dintre cei 5 ai comisiei 1p

Numărul minim de lacăte este $C_5^2=10$ 1p

b) Pentru fiecare lacăt trebuie să existe 3 chei,

Cum numărul minim de lacăte este 10 trebuie să existe 30 chei 1p

Fiecare membru al comisiei va avea 6 chei 1p

c) Trebuie ca una dintre cele 3 chei al fiecărui lacăt să se afle la orice grup de 3 membri ai comisiei şi ca la fiecare grup de 3 membri să existe un lacăt a cărui cheie să se afle la aceştia şi numai la ei 1p

Astfel seiful nu poate fi deschis de îndată ce nu sunt prezenţi 3 sau mai mulţi membri ai comisiei 1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, TrA = a + d$, $\det A = ad - bc$.

a) Să se demonstreze că $\det(A - xI_2) = x^2 - (TrA) \cdot x + \det A$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Dacă $\det(A - I_2) = 2$ şi $\det(A + I_2) = 4$, calculaţi $\det A$ şi $\det(A - 2I_2)$.

c) Dacă $A^{2014} = O_2$, demonstraţi că $A^2 = O_2$.

<u>Soluţie.</u>

a) Calcul 2p

b) Folosind pct a) obţinem $Tr(A) = 1$ şi $\det(A) = 2$. Rezultă $\det(A - 2I_2) = 4$ 3p

c) Calcul 2p

2. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right)$. Să se calculeze:

a) Limitele laterale în punctul $x_0 = 0$.

b) Limitele laterale în punctul $x_0 = -1$.

c) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

<u>Soluţie.</u>

a) $l_s = 0, l_d = \infty$ 3p

b) $l_s = \frac{1}{e}, l_d = -\infty$ 2p

c) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$ 2p

3. Un elev scrie un determinat de ordinul al treilea cu elemente numere reale astfel încât pe fiecare linie şi coloană suma elementelor este 1, iar pe diagonala principală toate elementele sunt $\frac{1}{2}$.

a) Care este valoarea minimă pe care o poate lua determinantul ?
b) Care este determinantul de valoare minimă ?

<u>Soluţie.</u>

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & x & \frac{1}{2} - x \\ \frac{1}{2} - x & \frac{1}{2} & x \\ x & \frac{1}{2} - x & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 3x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$$ 3p

a) Valoarea minimă este $\frac{1}{16}$ 3p

b) Determinantul de valoare minimă este cel pentru care $x = \frac{1}{4}$ 1p

4. Pe o insulă trăiesc 12 cameleoni. La un moment dat trei au culoarea roşie, patru au culoarea galbenă iar ceilalţi cinci au culoarea verde. Dacă se întâlnesc doi cameleoni de două culori diferite, atunci ambii îşi schimbă culoarea în ce-a de-a treia culoare. Altfel ei nu îşi schimbă culoarea. Demonstraţi că:
a) Este posibil ca, la un moment dat, niciun cameleon să nu aibă culoarea verde.
b) Nu este posibil ca, la un moment dat, toţi cameleonii să aibă culoarea verde. (Observaţi că în orice moment doar numărul cameleonilor de o singură culoare este multiplu de 3).

<u>Soluţie.</u>

a) Notăm cu R numărul cameleonilor roşii, cu G numărul cameleonilor galbeni şi cu V numărul cameleonilor verzi 1p
În tabelul de mai jos este exemplificată această posibilitate.

	I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*
R	3	5	7	9	11	10
G	4	3	2	1	0	2
V	5	4	3	2	1	0

.... 3p
b) Iniţial avem R = 3, G = 4, V = 5.
Dacă se întâlneşte unul roşu cu unul galben, vom avea R = 2, G = 3, V = 7.
Dacă se întâlneşte unul roşu cu unul verde, vom avea R = 2, G = 6, V = 4.
Dacă se întâlneşte unu galben cu unul verde, vom avea R = 5, G = 3, V = 4
.... 1p
Comparăm configuraţia iniţială (3, 4, 5) cu oricare din configuraţiile: (2, 3, 7); (2, 6, 4) sau (5, 3, 4), observăm că doar un număr din oricare configuraţie este multiplu de 3 .... 1p
Dacă ar fi posibil ca la un moment dat toţi să fie verzi, am obţine configuraţia (0, 0, 12) în care toate numerele sunt divizibile cu 3. (fals) 1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. a) Demonstrați că $\forall a,b \in \mathbb{Z}$ şi $\forall k \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea
$a^k - b^k = (a-b)\left(a^{k-1} + a^{k-2}b + ... + ab^{k-2} + b^{k-1}\right)$.

b) Dacă $f \in \mathbb{Z}[X]$ să se demonstreze că pentru orice $a,b \in \mathbb{Z}, a \neq b$, numărul $f(a) - f(b)$ este divizibil cu $a-b$.

c) Argumentați că nu există $g \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât:
$g(2013) = 2014;\ g(2014) = 2015;\ g(2015) = 2013.$

d) Există un polinom $h \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $h(2013) = 2013, h(2014) = 2014$ şi $h(n)$ este irațional pentru orice n întreg diferit de 2013 şi 2014 ?

<u>Soluție.</u>

a) Calcul elementar 2p

b) Dacă $f = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$

$f(a) - f(b) = a_n\left(a^n - b^n\right) + a_{n-1}\left(a^{n-1} - b^{n-1}\right) + ... + a_1(a-b) \vdots (a-b)$ 2p

c) Presupunem că există $g \in \mathbb{Z}[X]$ cu proprietatea din enunț.

Conform celor demonstrate la punctul b) am obține $(2015-2013) \mid \left(g(2015) - g(2013)\right) \Rightarrow 2 \mid -1$, fals 2p

d) Există *h* ce satisface cerința. De exemplu $h = \sqrt{2}(X-2013)(X-2014) + X$ 1p

2. Considerăm funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!}$ şi $g(x) = e^{-x^2}$.

a) Calculați $f'(0); f''(0); f'''(0); f^{(4)}(0)$.

b) Demonstrați că $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ şi $f(x) < 0, \forall x < 0.$

c) Să se demonstreze că aria suprafeței cuprinsă între graficul funcției *g,* axa *Ox* şi dreptele de ecuații *x* = 0 şi *x* = 1 este un număr cuprins în intervalul (0,74; 0,75).

<u>Soluție.</u>

a) $f'(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}, \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $f''(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!}, \forall x \in \mathbb{R}$

$f'''(x)=e^x-1-x, \forall x\in\mathbb{R}$ $\qquad$ $f^{(4)}(x)=e^x-1, \forall x\in\mathbb{R}$

.... 1p

Deducem că $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=f^{(4)}(0)=0$ 1p

b)

x	$-\infty$							0							$+\infty$
$f^{(4)}(x)$	-	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$f'''(x)$	+	↘	+	↘	+	↘	+	0	+	↗	+	↗	+	↗	+
$f''(x)$	-	↗	-	↗	-	↗	-	0	+	↗	+	↗	+	↗	+
$f'(x)$	+	↘	+	↘	+	↘	+	0	+	↗	+	↗	+	↗	+
$f(x)$	-	↗	-	↗	-	↗	-	0	+	↗	+	↗	+	↗	+

.... 3p

c) $\text{Aria}(\Gamma_g)=\int_0^1 e^{-x^2}dx$

Dar:

$$\left.\begin{matrix} f'(x)\ge 0 \\ \forall x\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix} e^x\ge 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6} \\ \forall x\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\}\Rightarrow e^{-x^2}\ge 1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6}\Rightarrow \int_0^1 e^{-x^2}dx\ge\int_0^1\left(1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6}\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}-\frac{x^7}{42}\right)\Bigg|_0^1 = 0{,}7428571$$ 1p

Din

$$\left.\begin{matrix} f(x)<0 \\ \forall x\in(-\infty,0)\end{matrix}\right\}\Rightarrow e^x<1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24};\forall x\in(-\infty,0)\Rightarrow e^{-x^2}<1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{24}\Rightarrow$$

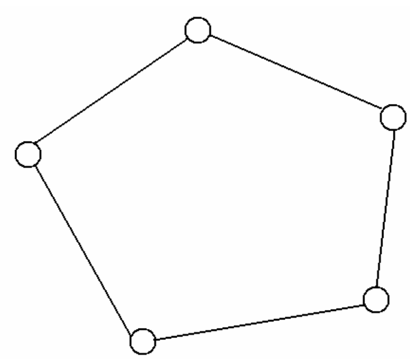
$$\Rightarrow\int_0^1 e^{-x^2}dx<\int_0^1\left(1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{24}\right)dx\Rightarrow\int_0^1 e^{-x^2}dx<\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}-\frac{x^7}{42}+\frac{x^9}{216}\right)\Bigg|_0^1=0{,}7474867$$

Finalizare 1p

3. Avem la dispoziție două culori roşu şi albastru. Notăm cu $\mathcal{H}$ mulțimea tuturor colorărilor posibile (roşu sau albastru) a vârfurilor pentagonului alăturat. La două colorări $\mathcal{C}_1\in\mathcal{H}$ şi $\mathcal{C}_2\in\mathcal{H}$ le asociem colorarea $\mathcal{C}_3\in\mathcal{H}$ astfel:

i) dacă vârfurile corespunzătoare lui $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt de culori diferite, atunci în $\mathcal{C}_3$ vârful va fi colorat cu roşu;

ii) dacă vârfurile corespunzătoare lui $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt de aceiaşi culoare, atunci în $\mathcal{C}_3$ vârful va fi colorat cu albastru;



a) Aflați cardinalul mulțimii $\mathcal{H}$;

b) Aflați elementul neutru pentru legea de compoziție descrisă pe $\mathcal{H}$.

<u>Soluție.</u>

a) Fiecare vârf al pentagonului se poate colora în roşu sau albastru.

Deducem card $\mathcal{H} = 2\times2\times2\times2\times2 = 32$ 3p

b) Obține că elementul neutru este colorarea în care toate vârfurile pentagonului sunt albastre

.... 4p

4. Admitem cunoscut rezultatul:

Dacă $\mathcal{P}$ este o placă omogenă care se identifică cu mulțimea $\Gamma_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}$, unde $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ este o funcție continuă, atunci centrul de greutate a plăcii $\mathcal{P}$ este punctul $G(x_G, y_G)$ ale cărui coordonate sunt:

$$x_G = \frac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}; \quad y_G = \frac{1}{2}\frac{\int_a^b f^2(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx};$$

Să se afle coordonatele centrului de greutate ale plăcii omogene $\mathcal{P}$ definită prin $f:[0,\pi]\to[0,1]$, $f(x)=\sin x$, $\mathcal{P} = \{(x,y) \mid 0\le x\le\pi, 0\le y\le f(x)\}$

<u>Soluție.</u>

$$y_G = \frac{1}{2}\frac{\int_0^\pi \sin^2 x\,dx}{\int_0^\pi \sin x\,dx} = \frac{1}{2}\frac{\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx}{-\cos x\big|_0^\pi} = \frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi}{8}$$ 4p

Evident $x_G = \frac{\pi}{2}$ (sau prin calcul) 3p